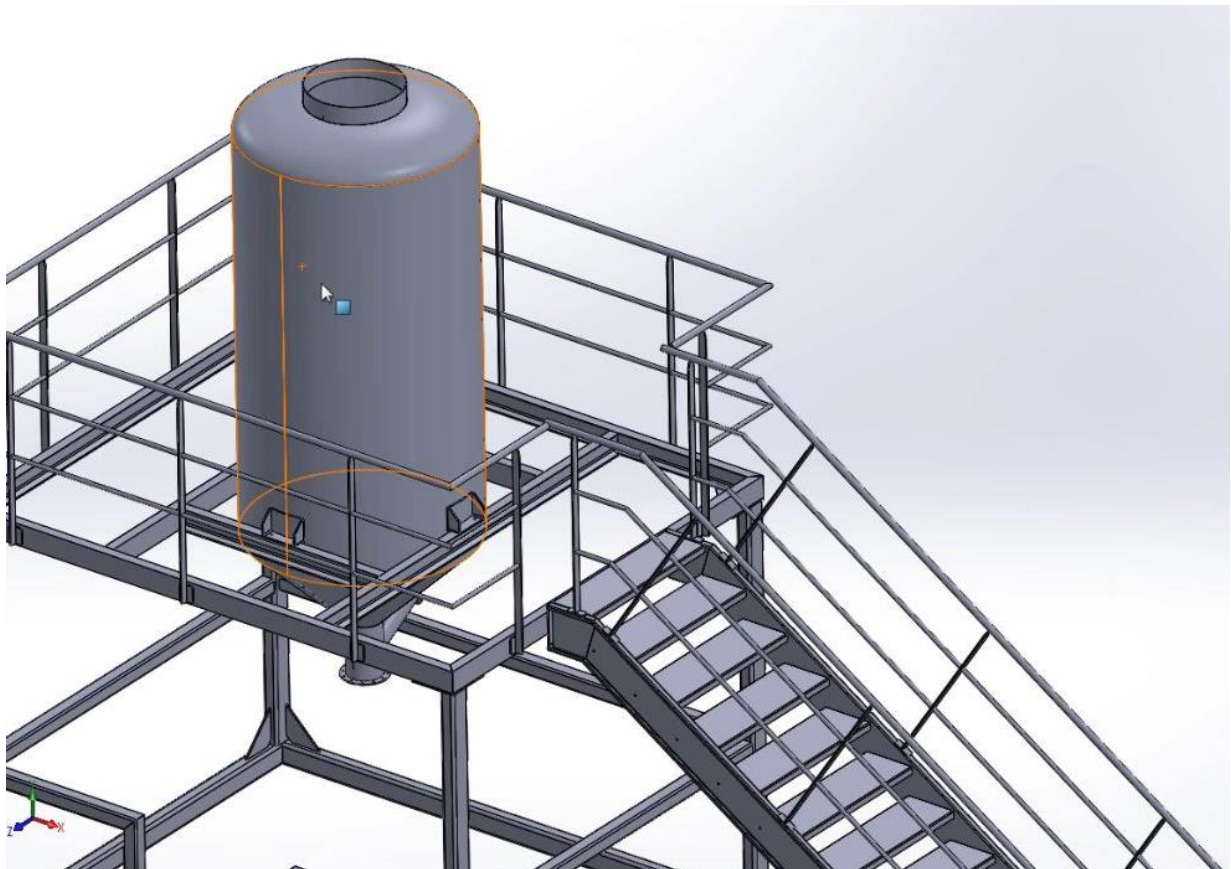


COURBES DE BEZIER ET B-SPLINES



INTRODUCTION :

Il y a quelques années de cela, le programme de sciences physiques de BAC PRO avait un chapitre sur l'écoulement des fluides. Il était question aussi de la portance d'une aile d'avion et donc nous parlions du profil de l'aile d'un avion, de l'extrados et de l'intrados comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

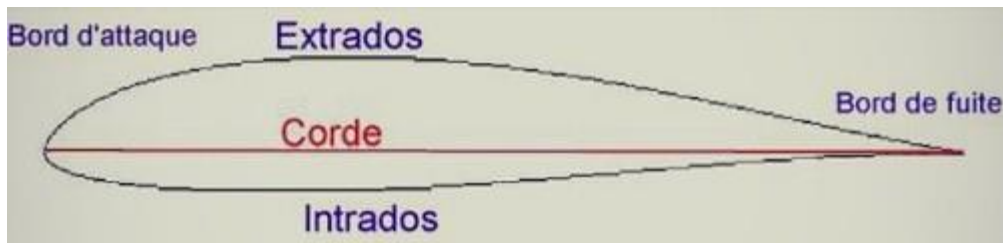


Figure 1 : profil d'une aile d'avion

Au-delà de la physique de l'écoulement des fluides sur ce profil, je faisais le profil de l'aile en mathématique avec les élèves (en les aidant bien évidemment) à l'aide des courbes de Bézier.

Le problème était le suivant, comment faire une courbe mathématique du profil d'une aile d'avion ?

Il était évident que les courbes polynomiales étaient hors de portée des élèves lorsque cette courbe devait passer par plusieurs points différents. Je me suis souvenu d'une conférence à l'université de Lille quelques années auparavant sur les courbes de Bézier entre autres par un chercheur des Arts Et Métiers qui lui travaillait sur les turbines des moteurs de la fusée Ariane.

A l'aide du logiciel Géogébra nous pouvions générer des profils différents et les tester ensuite en faisant de profils en carton et en repliant du papier dessus.

Voici ce qu'avec 4 points et un curseur on obtient sur Géogébra.

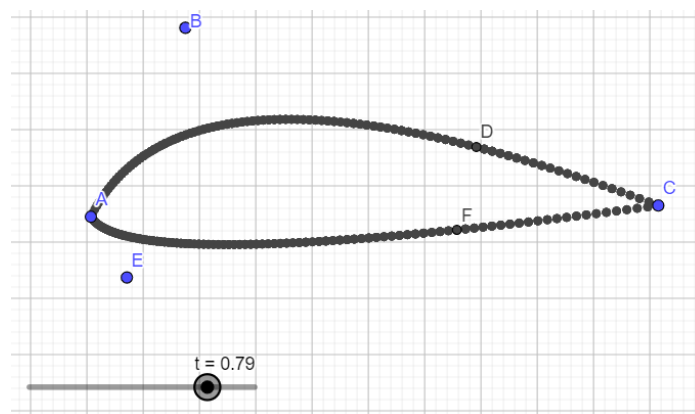


Figure 2 : profil sur Géogébra

Bien sûr, ici c'est une version simplifiée car il n'y a que 4 points appelés points de contrôle. Il est possible d'affiner le profil et de faire ce que l'on veut avec plus de points.

Ces courbes sont utilisées ici afin d'avoir des profils mais elles sont utilisées dans beaucoup de domaines comme par exemple la formation des lettres dans un fichier de type **pdf** (Portable Document Format).

HISTOIRE BREVE DE PIERRE DE BEZIER :



Pierre de Bézier (1958)

Pierre de Bézier (1910- 1999) était ingénieur (de second plan selon ses propos, il était gadzart, n'étant pas sorti ni de centrale ni de polytechnique) chez Renault. Il était issu des arts et métiers puis diplômé de Supélec et était donc ingénieur électromécanicien. En 1977 Pierre de Bézier a obtenu un doctorat (à 67 ans) à l'université Pierre et Marie Curie de Paris.

Il est connu pour ses courbes et surfaces de Bézier, auxquelles il a donné son nom mais aussi pour avoir créé le logiciel Unisurf (pour unification et surface) qui est la base de la DAO (dessin assisté par Ordinateur).

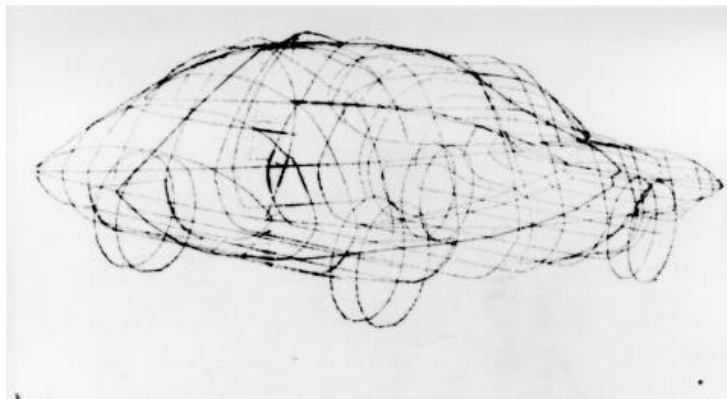


Figure 3 : Croquis en CAO avec le logiciel Unisurf

Ces courbes sont toujours utilisées et sont à la base des logiciels de graphisme et modélisation (CFAO) tels que CATIA (Dassault aviation), SolidWorks, PostScript, illustrator...

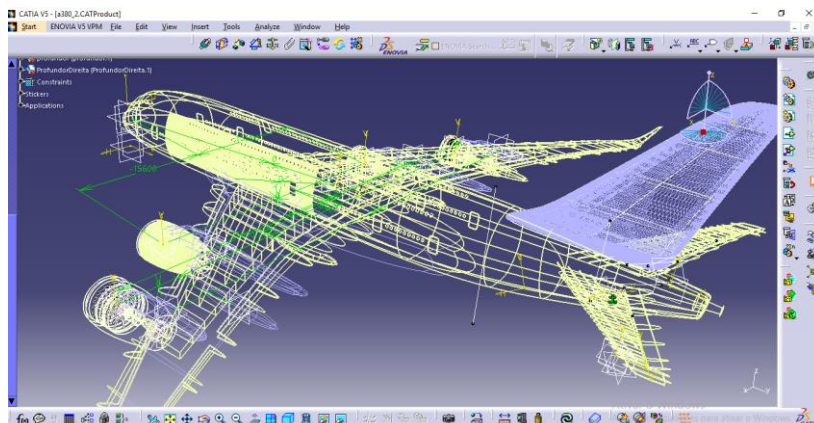


Figure 4 : exemple d'image de CATIA

I) COURBES DE BEZIER

a) Approche des courbes de Bézier par le barycentre de 2 points

Définition 1 :

Soient A et B deux points du plan et α et β deux réels ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$) tels que $\alpha + \beta \neq 0$

On appelle barycentre de deux points A et B associés aux coefficients respectifs α et β le point G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

A partir de cette définition, on peut introduire le point O et en déduire la relation suivante :

$$(i) \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$$

En se plaçant dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la relation précédente reste valable, il reste à transformer un peu la relation en posant : $t = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ce qui donne $(1-t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$

En transposant ces nouveaux coefficients (i) devient :

$$(ii) \overrightarrow{OG} = t \overrightarrow{OA} + (1 - t) \overrightarrow{OB}$$

En imposant à t l'intervalle de valeurs suivant : $t \in [0; 1]$, nous avons le point G qui appartient au segment [AB].

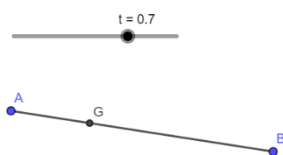


Figure 5 : barycentre de 2 points A et B

Cette figure a été réalisée sur Géogébra en prenant un curseur $t \in [0; 1]$, deux points A et B quelconques.

Pour tracer G, il suffit d'écrire : $t \cdot A + (1-t) \cdot B$, ce qui se traduit par la relation (ii), il n'est nul besoin d'écrire OA.

En déplaçant le curseur, le point G se déplace de A vers B et inversement comme vous pouvez le constater sur la figure 6 ci-dessous (avec un pas de 0,1 pour t). Il est à noter que A et B sont appelés **points de contrôle**.

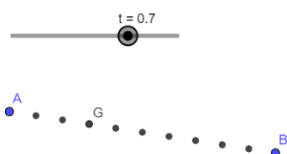


Figure 6 : trace du point G

b) Courbes de Bézier à 3 points de contrôle

Ce qui a été fait pour le point G, barycentre de A et B peut être fait aussi pour 3 points (A, B et C). A la différence que Pierre de Bézier n'a pas étendue ce barycentre à trois points mais a modifié les coefficients de la manière suivante :

$$(iii)\overrightarrow{OG} = t^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + (1-t)^2\overrightarrow{OC}$$

Cette relation peut être obtenue en prenant G_1 barycentre de A et B, G_2 barycentre de B et C et G barycentre de deux barycentres G_1 et G_2 tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG_1} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OG_2} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OG} = t\overrightarrow{OG_1} + (1-t)\overrightarrow{OG_2} \end{cases}$$

Ce point de vue est proche de l'algorithme de Casteljau.

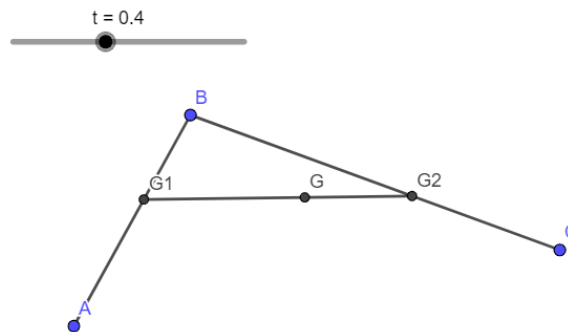


Figure 7 : construction de G avec 3 points de contrôle

En déplaçant le curseur et en visualisant la trace du point G on obtient la figure suivante :

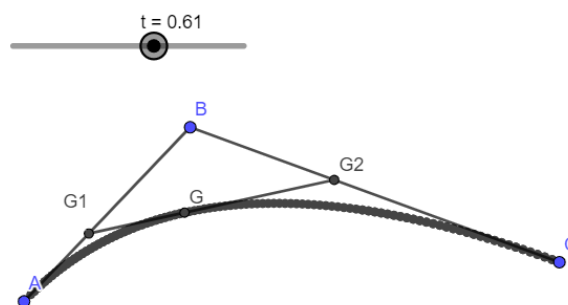


Figure 8 : trace du point G avec un pas de 0,01

En fait la relation peut se traduire par le fait que le point G est le barycentre des points A, B et C tel que

$$G = \text{BAR}[(A ; t^2), (B ; 2t(1-t)) \text{ et } (C ; (1-t)^3)].$$

c) Courbes de Bézier à 4 points de contrôle

Le nombre de points de contrôle dépend de l'opérateur et de la forme qu'il veut développer, ainsi nous pouvons avoir 4 points de contrôle (A, B, C et D) ou plus.

Le point G sera remplacé par le point M qui est plus usité en général lorsqu'on parle d'un point défini par des relations mathématiques.

En prenant la même méthode que pour 3 points, nous obtenons la relation (iv) pour 4 points suivante :

$$(iv) \quad \overrightarrow{OM} = t^3\overrightarrow{OA} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OB} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OC} + (1-t)^3\overrightarrow{OD}$$

Exemples de courbes avec différents positions relatives des points de contrôle.

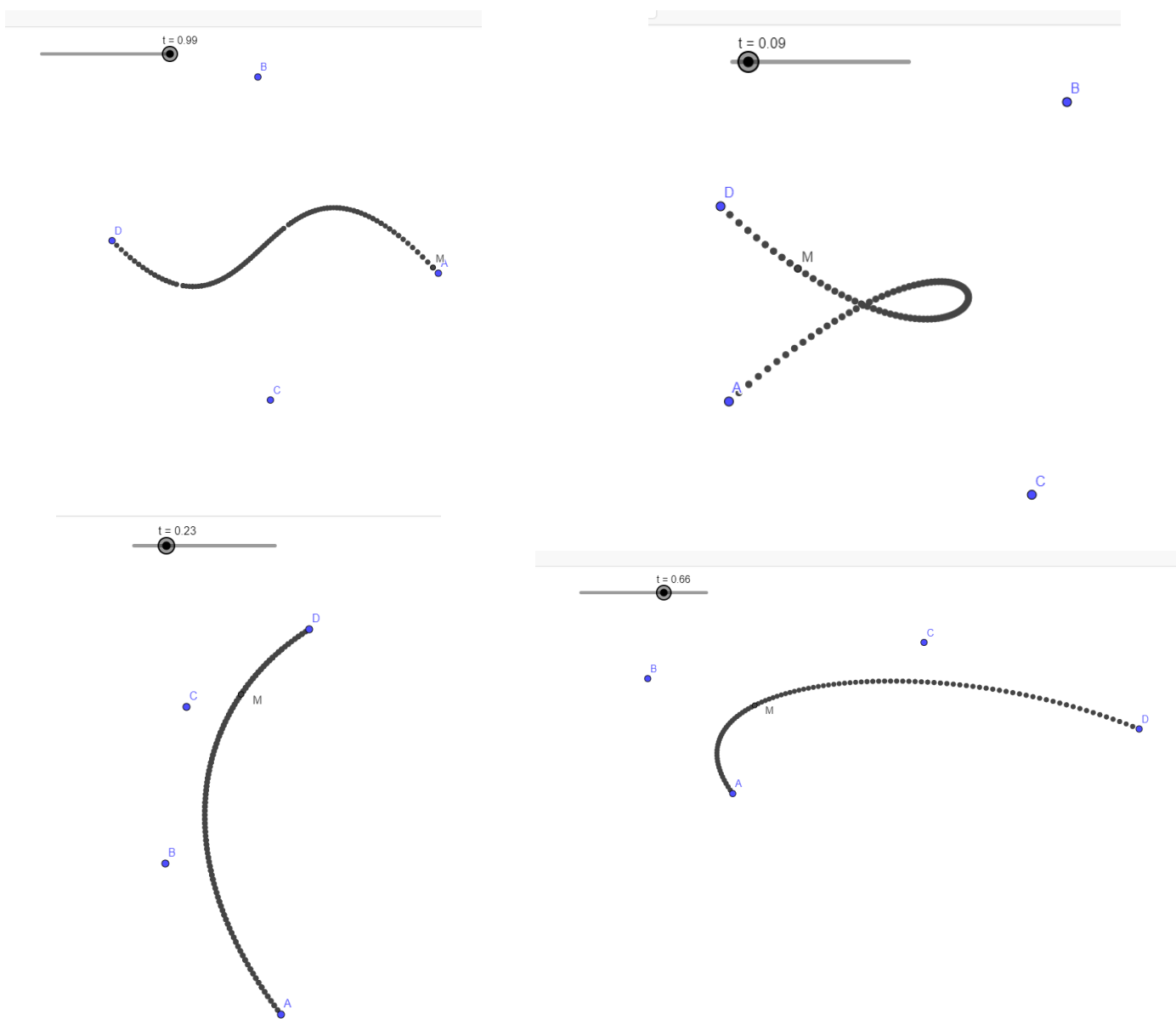


Figure 9 : différentes courbes de Bézier à 4 points de contrôle

NB : Dans Géogébra la relation (iv) peut s'écrire dans saisie :

$$\text{saisie: } t^3A + 3t^2(1-t)B + 3t(1-t)^2C + (1-t)^3D$$

Les vecteurs sont remplacés par les points qui font office de vecteur.

Cette façon de procéder dans Géogébra est assez pédagogique mais peu pratique si on désire faire plusieurs courbes.

Il est possible de tracer plusieurs plus simplement en créant un ou des outils. Il suffit ensuite de créer l'outil à n points et de placer les n points pour que la courbe s'affiche et bouge en déplaçant un point avec **Courbe**.

Exemple avec 3 points :

1^{ère} étape : placer trois points A , B et C

2^{ème} étape : Créer la courbe paramétrée à partir de ces points

A = (4.56, -0.46)
B = (10.56, 2.32)
C = (15.06, 0.78)
a = Courbe($t^2 x(A) + 2 t (1-t) x(B) + (1-t)^2 x(C)$, $t^2 y(A) + 2 t (1-t) y(B) + (1-t)^2 y(C)$, t, 0, 1)
= $\left. \begin{array}{l} x = t^2 \cdot 4.56 + 2 t (1-t) \cdot 10.56 + (1-t)^2 \cdot 15.06 \\ y = t^2 (-0.46) + 2 t (1-t) \cdot 2.32 + (1-t)^2 \cdot 0.78 \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1$

$$a = \text{Courbe}\left(t^2 x(A) + 2 t (1-t) x(B) + (1-t)^2 x(C), t^2 y(A) + 2 t (1-t) y(B) + (1-t)^2 y(C), t, 0, 1\right)$$
$$= \left. \begin{array}{l} x = t^2 \cdot 4.56 + 2 t (1-t) \cdot 10.56 + (1-t)^2 \cdot 15.06 \\ y = t^2 (-0.46) + 2 t (1-t) \cdot 2.32 + (1-t)^2 \cdot 0.78 \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1$$

Courbe va tracer la courbe en créant la variable t qui va varier de 0 à 1.

3^{ème} étape : création de l'outil

- Fichier
- Éditer
- Associations
- Affichage
- Propriétés
- Outils
- Barre d'outils personnalisée
- Créer un nouvel outil**
- Gérer les outils
- Aide & Réactions

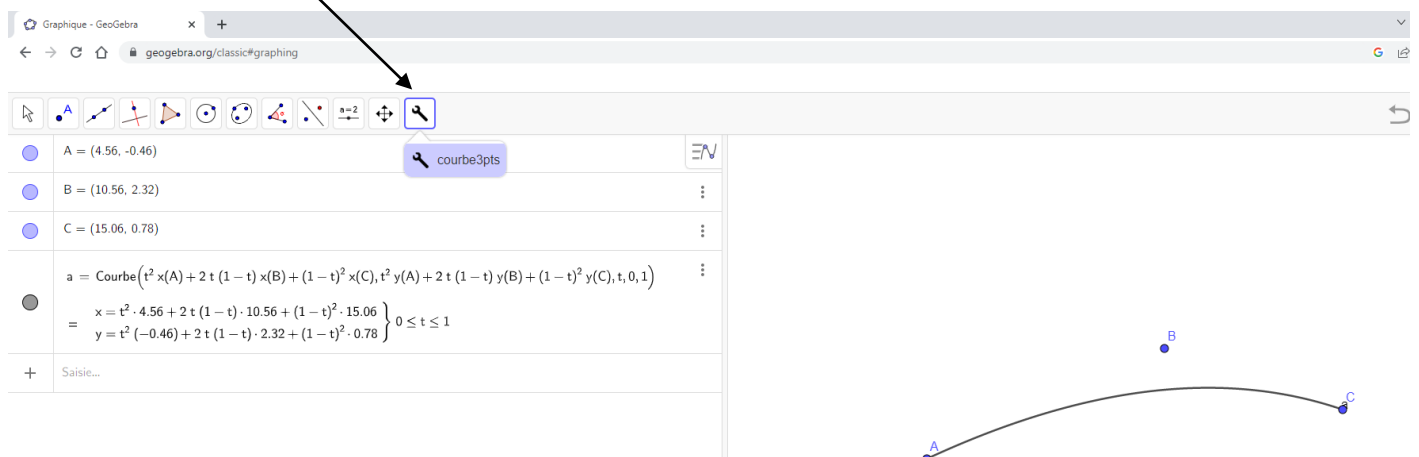


Objets finaux : cliquer sur la courbe

Objets initiaux : cliquer sur les 3 points

Nom et icône : mettre le nom de l'outil

Un onglet Outil sera affiché et il suffit ensuite de cliquer sur cet onglet et de placer 3 points, la courbe se fera tout simplement.



Il est plus aisé de tracer des courbes avec l'outil mail il faut le créer d'abord. C'est une activité qui peut être réalisée avec des élèves.

Exemples d'application de ces courbes.



Figure 10 : création d'une police d'écriture



Figure 11 : création de personnages sportif avec la lettre π

d) Courbes de Bézier à n points de contrôle

➤ Les coefficients de pondération

Comme vous avez compris, les coefficients de pondération sont les coefficients binomiaux que l'on peut rassembler dans le **triangle de Pascal**

n									
0	1								
1	1	2	1						
2	1	3	3	1					
3	1	4	6	4	1				
4	1	5	10	10	5	1			
5	1	6	15	20	15	6	1		
6	1	7	21	35	35	21	7	1	

Figure 10 : Triangle de Pascal (ordre n =6)

Chaque coefficient est un coefficient binomial qui peut donc s'écrire : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ou $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \dots 2 \times 1$

➤ Les polynômes de Bernstein

Dans la relation (iv), en plus des coefficients binomiaux d'autres termes apparaissent, ce sont les polynômes en t.

$$(iv) \quad \overrightarrow{OM} = t^3 \overrightarrow{OA} + 3t^2(1-t) \overrightarrow{OB} + 3t(1-t)^2 \overrightarrow{OC} + (1-t)^3 \overrightarrow{OD}$$

Dans ce cas-ci, les polynômes sont t^3 , $3t^2(1-t)$, $3t(1-t)^2$ et $(1-t)^3$.

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein.

Sergei Bernstein (1880-1968): mathématicien russe qui travaillé sur l'approximation de courbes à l'aide de combinaison linéaires de polynômes et qui a notamment résolu le 19^{ème} problème de Hilbert dans sa thèse de doctorat.



Sergei Bernstein

Les polynômes de Bernstein s'écrivent de façon générale :

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k$$

La relation (iv) peut s'écrire :

$$(iv) \quad \overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^3 B_k^3(t) \overrightarrow{OA_k}$$

Ainsi nous pouvons facilement écrire la relation pour (n+1) points de contrôle :

$$(v) \quad \overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \overrightarrow{OA_k}$$

Ou :

$$(v) \quad \overrightarrow{OM} = \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k \overrightarrow{OA_k}$$

Exemples de polynômes de Bernstein :

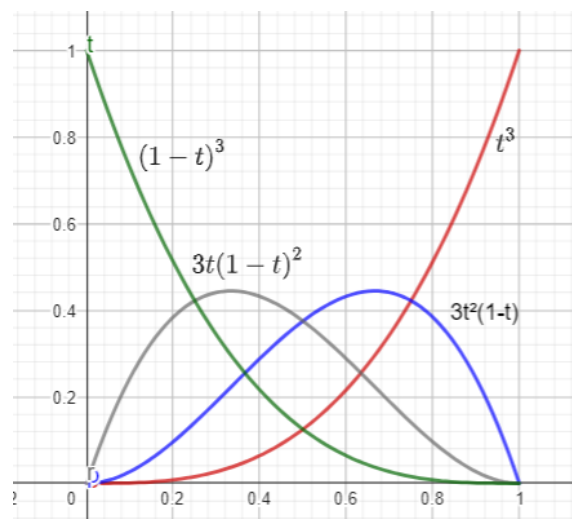


Figure 11 : $B_k^3(t)$

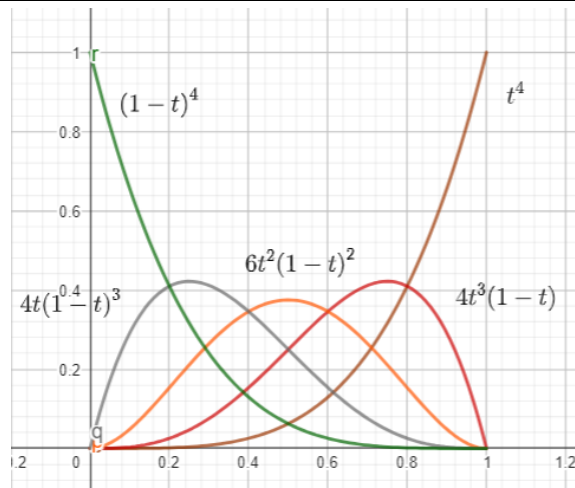


Figure 12: $B_k^4(t)$

e) **Raccordement des courbes de Bézier**

Lorsqu'on trace différentes courbes de Bézier il arrive un moment où il faut raccorder les courbes entre elles comme dans l'exemple suivant :

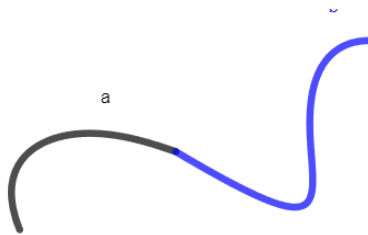


Figure 12 : raccordement de 2 courbes

A priori il y a continuité entre les deux courbes mais est ce que le raccordement se fait sans cassure c'est-à-dire y a-t-il un raccordement de type C^1 ?

Ici comme on peut le constater ci-dessous les tangentes au point de raccordement ne sont pas identiques à droite et à gauche.

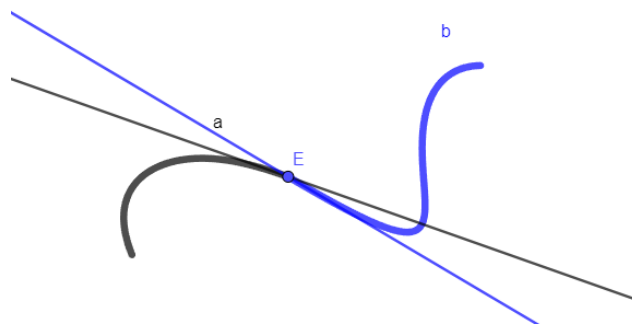


Figure 14 : tangentes au point E à droite et à gauche

Pour « éviter » cette cassure il suffit de déplacer le point de contrôle dont dépend cette tangente pour que les deux tangentes se superposent, comme ci-dessous :

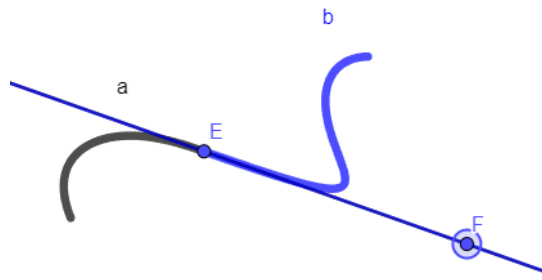


Figure 15 : superposition des tangentes

Ce qui donne deux courbes raccordées en un point et cela de manière C^1 , c'est-à-dire que les tangentes sont identiques en ce point.

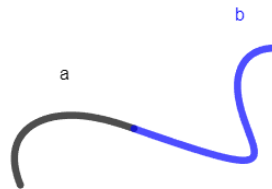


Figure 16 : raccordement C^1

f) Problèmes des courbes de Bézier

Une courbe de Bézier génère plusieurs problèmes de par sa conception :

➤ **Problème de raccordement**

Le problème de raccordement est un problème des courbes de Bézier, il faut en effet déplacer les points pour avoir un raccordement « parfait » de telle sorte que les tangentes soient identiques.

➤ **Problème de la globalité**

Le second problème est que lorsqu'on déplace un point, toute la courbe est modifiée. Dans l'exemple ci-dessous les deux courbes sont les courbes de Bézier avec la position d'un seul point de contrôle différent.

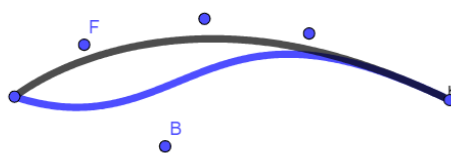


Figure 17 : déplacement d'un point de contrôle (F et B)

Cette modification de la courbe par le déplacement d'un point, est le problème de la globalité de cette méthode.

Pour remédier à ce problème, il existe les B-splines, ces courbes permettent de déplacer les points de contrôle sans que toute la courbe n'en soit affectée. Le déplacement d'un point n'a qu'un effet limité sur la courbe.

II) Les B-Splines

Définition : Une spline est une fonction définie par morceaux avec des polynômes.

Les B-splines (BasicSpline) sont des combinaisons linéaires de splines. L'intérêt des B-splines est que le déplacement d'un point de contrôle n'affecte qu'une partie limitée de la courbe ce qui est plus confortable pour la CAO (Conception Assistée par Ordinateur), la méthode B-spline est dite « locale ».

a) Courbes de B-splines : modèle de Riesenfeld de degré 2

Dans la suite t est un réel tel que : $t \in [0 ; 1]$.

On dispose de 4 points A, B, C et D.

Le but est de tracer deux arcs de courbes C_0 et C_1 telles que :

- C_0 est l'ensemble des points M_0 tels que :

$$\overrightarrow{OM_0}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OA} + R_1(t)\overrightarrow{OB} + R_2(t)\overrightarrow{OC}$$

- C_1 est l'ensemble des points M_1 tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OB} + R_1(t)\overrightarrow{OC} + R_2(t)\overrightarrow{OD}$$

Contraintes :

- Le but est de construire des courbes indépendantes du repère choisi, la traduction de cette contrainte est que M_0 est le barycentre de (A, R_0), (B, R_1) et (C, R_2).

Cette dernière impose que : $R_0(t) + R_1(t) + R_2(t) = 1$

- Il faut que les courbes se raccordent.

Cela se traduit par : $\overrightarrow{OM_0}(1) = \overrightarrow{OM_1}(0)$

- Les tangentes au point de raccordement sont identiques.

Traductions mathématiques : $(\overrightarrow{OM_0}(1))' = (\overrightarrow{OM_1}(0))'$

Et donc sur les coefficients $R(t)$:

$$\begin{cases} R_0'(1) = R_2'(1) = 0 \\ R_1'(1) = R_0'(0) \\ R_2'(1) = R_1'(0) \end{cases}$$

Le modèle de Riesenfeld (Richard Riesenfeld mathématicien américain professeur de l'université de l'Utah) de degré 2 est un modèle polynomial de degré 2 comme son nom l'indique.

On peut ainsi écrire les fonctions $R_k(t)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} R_0(t) = a_0 t^2 + b_0 t + c_0 \\ R_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ R_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{cases}$$

Les différentes contraintes imposées donnent un système de 9 équations à 9 inconnues.

Je passerais les détails de la résolution, pour vous donner les solutions.

$$\begin{cases} R_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2} \\ R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \\ R_2(t) = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$$

Exemple sur Géogébra

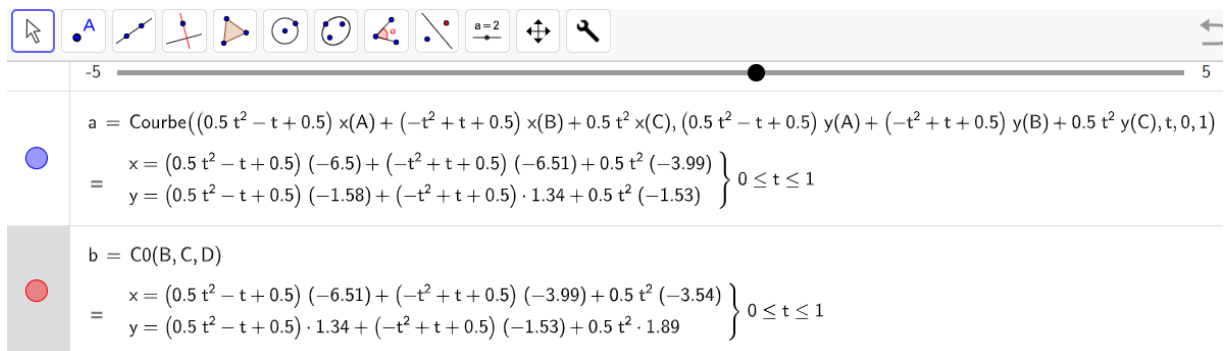


Figure 18 : fonctions de Riesenfeld de degré 2 sur Géogébra

Remarque : la seconde courbe a été créé à partir d'un outil dérivé la première courbe.

La courbe formée par C_0 et C_1 est une B-splines associée aux points de contrôle A, B, C et D.

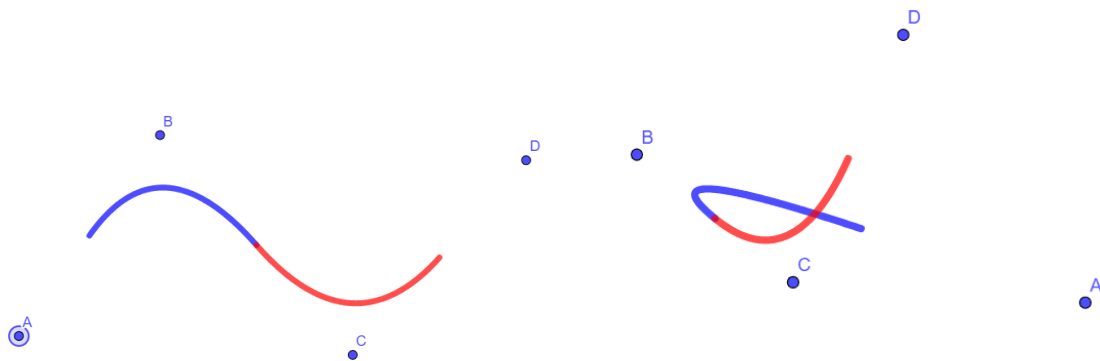


Figure 19 : B-splines de degré 2

Remarque : les courbes ne passent pas par les points de contrôle.

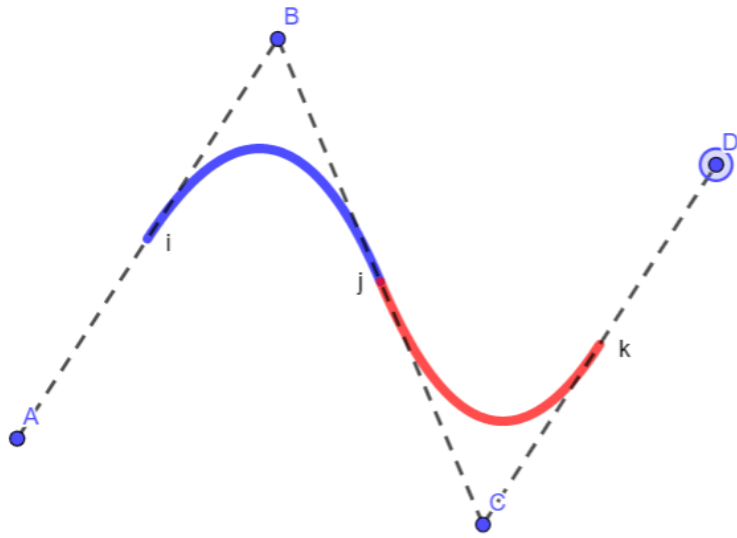


Figure 20 : B-splines avec les segments entre les points de contrôle

Exemple de tracé avec les B-splines sur Géogebra : Voiture dessinée avec des mathématiques !

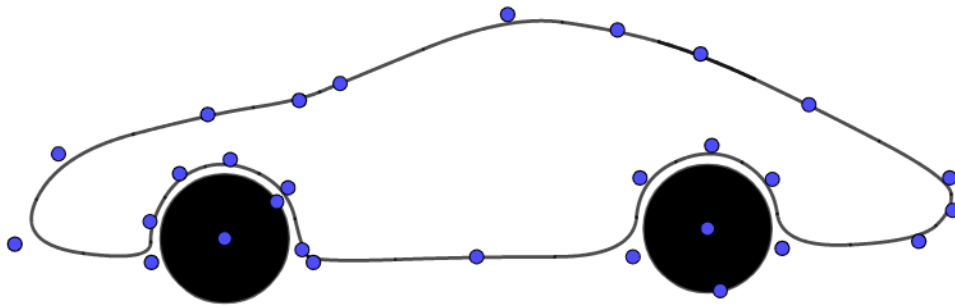


Figure 21 : profil voiture avec B-splines et points de contrôles

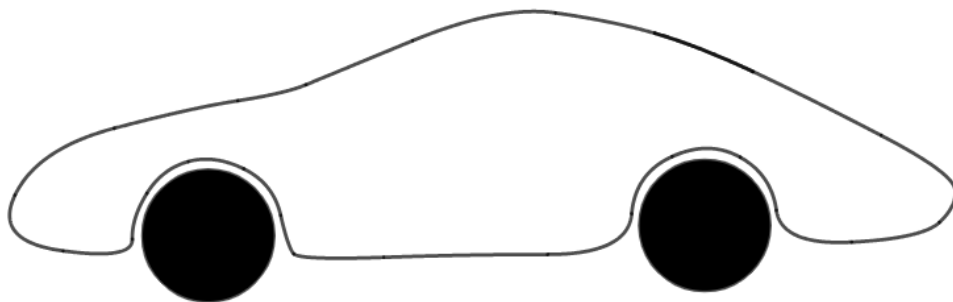


Figure 22 : profil voiture avec B-splines de degré 2

Remarque : les polynômes de Riesenfeld de degré 2 (R_0 , R_1 et R_2) s'écrivent de la façon suivante $R_{0,2}(t)$, $R_{1,2}(t)$, $R_{2,2}(t)$

Les B-splines que nous avons vu, sont contrôlés par 4 points de contrôle, mais il est possible de la construire avec plus de 4 points. Nous avons alors deux possibilités pour le faire :

- Soit on fait un nouvel arc (comme sur le profil de voiture en figure 22).
- Soit on ajoute un point de définition pour chaque arc.

Nous allons voir cette dernière solution.

b) Courbes de B-splines : modèle de Riesenfeld de degré 3

Prenons 5 points de définition, les arcs auront alors comme définition les relations suivantes :

- C_0 est l'ensemble des points M_0 tels que :

$$\overrightarrow{OM_0}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OA} + R_1(t)\overrightarrow{OB} + R_2(t)\overrightarrow{OC} + R_3(t)\overrightarrow{OD}$$

- C_1 est l'ensemble des points M_0 tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OB} + R_1(t)\overrightarrow{OC} + R_2(t)\overrightarrow{OD} + R_3(t)\overrightarrow{OE}$$

Nous avons donc 4 polynômes et donc il faut 4 coefficients. Il est donc indispensable d'avoir des polynômes de degré 3.

Les polynômes sont les suivants :

$$\begin{cases} R_{0,3}(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \\ R_{1,3}(t) = \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3} \\ R_{2,3}(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \\ R_{3,3}(t) = \frac{t^3}{6} \end{cases}$$

Courbes des polynômes $R_{k,n}(t)$

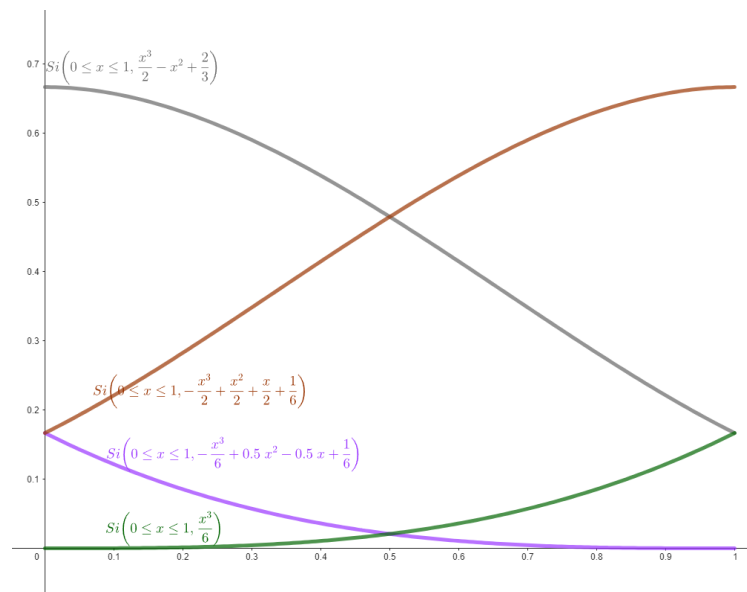


Figure 23 : courbes des polynômes $R_{k,n}(t)$

B-splines de degré 3

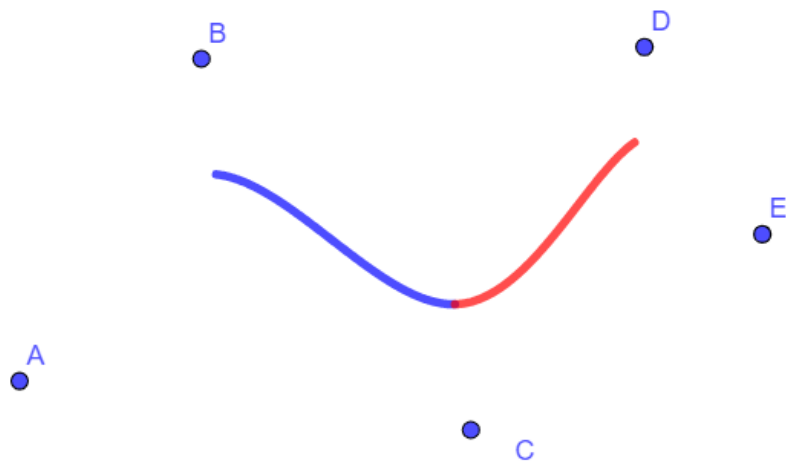


Figure 24 : B-splines de degré 3

Remarque : il est possible d'ajouter des points et donc les polynômes de Riesenfeld seront de degré n qui s'écrivent de manière générale :

$$R_{i,n}(t) = (n + 1) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(t + n - i - j)^n}{j! (n - j + 1)!}$$

c) Comparaison des courbes des Bézier et B-splines

➤ **4 points de contrôle** : courbe de Bézier et B-splines de degré 2

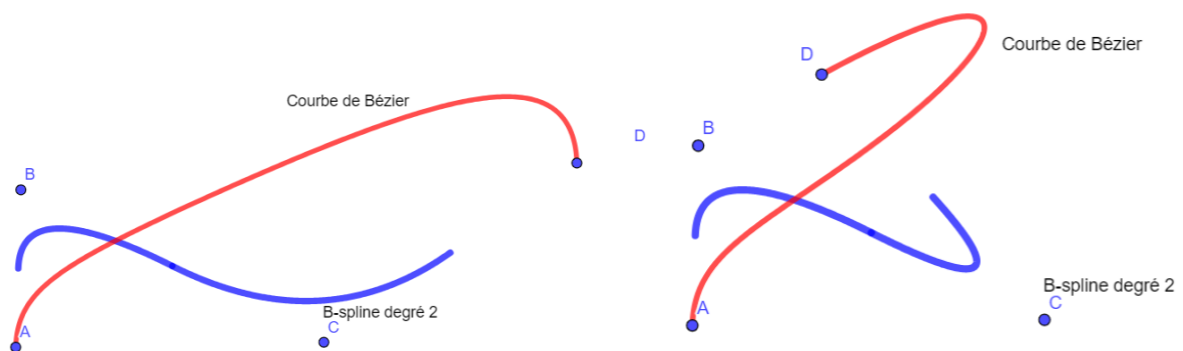


Figure 25 : comparaison des courbes à 4 points

Même si les courbes de Bézier et les B-splines sont des courbes paramétrées, nous pouvons voir sur cet exemple que les courbes sont bien distinctes. La première passe par les points initiaux et finaux et la seconde ne passe par aucun point !

➤ **5 points de contrôle** : courbe de Bézier et B-splines de degré 3

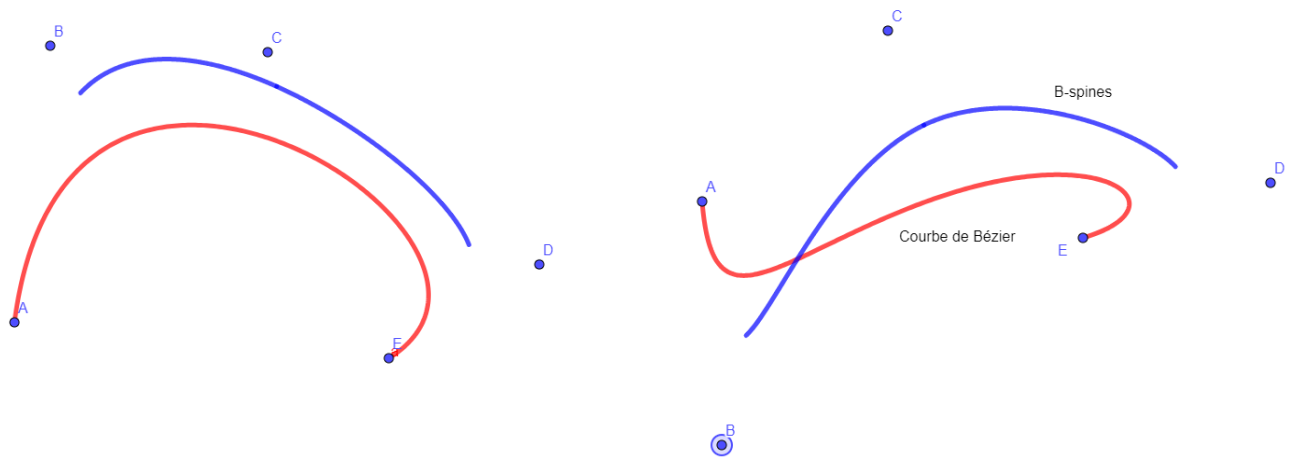


Figure 26 : comparaison des courbes à 5 points

d) Avantages de B-splines sur les courbes de Bézier

Avantages sur un exemple : le profil d'une aile d'avion

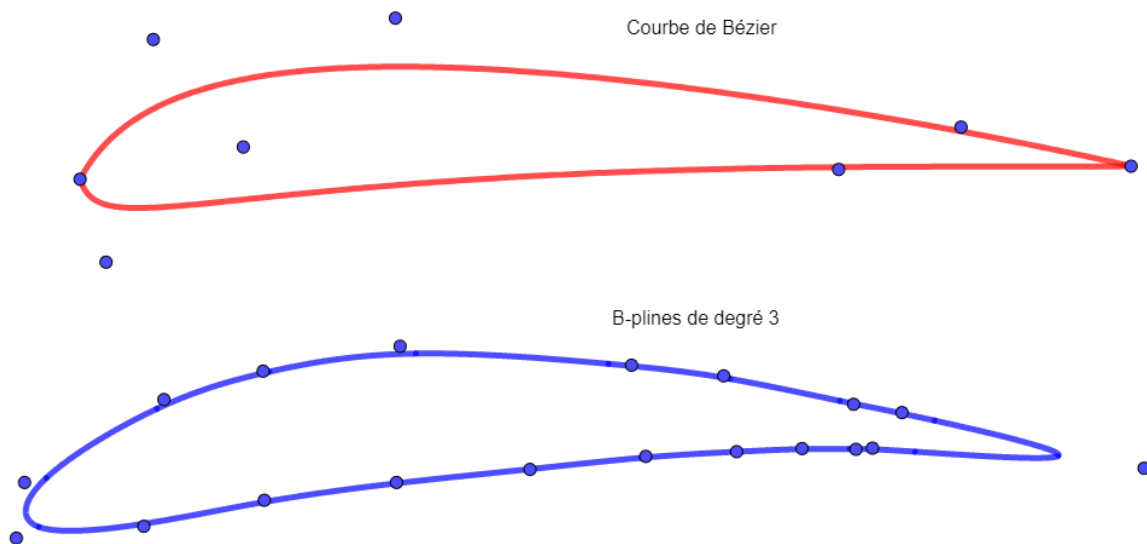


Figure 27 : profil d'une aile d'avion avec les courbes de Bézier et les B-splines

➤ **Courbes de Bézier :**

- **8 points**
- **2 courbes**

➤ **B-splines :**

- **20 points**
- **19 splines**

Sur cet exemple on peut voir des différences sur le nombre de points et le nombre de courbes. Les courbes de Bézier ici utilisent moins de calcul car j'ai pris 4 points de contrôle. Il aurait été possible de faire le profil avec une seule courbe, le degré des polynômes de Bernstein aurait été de degré 7. De plus les courbes de Bézier sont plus faciles d'utilisation mais les raccordements sont plus difficiles à réaliser.

Au niveau des calculs, plus le nombre de points augmente et plus le degré des polynômes de Bernstein augmente et le fait de déplacer un point modifie toute la courbe.

Par contre le degré des B-splines reste identiques, seul le nombre de Splines change, et déplacer un point modifié localement la courbe dans son ensemble.

CONCLUSION :

Souvent des personnes ou des élèves me posent la question suivante : A quoi ça sert les maths ?

Il n'est pas aisé de répondre à cela, bien sûr il y a les calculs commerciaux, les nombres, la statistique voir la trigonométrie mais en ce qui concerne les fonctions cela est plus difficile à expliquer simplement. Par le biais de ces courbes de Bézier et les B-splines, on peut leur montrer qu'avec des fonction simples (t^2 ou t^3 voir t^4), les logiciels qu'ils utilisent (exemple : SolidWorks®) fonctionnent avec des mathématiques ! Et que tracer une courbe en CAO, c'est faire des mathématiques car sans elles cela ne serait pas possible.

Bien sur les courbes de Bézier et les B-splines ne sont qu'une application des mathématiques parmi tant d'autres, mais elles me paraissent simples d'accès pour nos élèves (étude des fonctions, repère, vecteurs, dérivées...), ils peuvent créer des formes, des objets et ainsi donner du sens aux mathématiques faites en classe !

